حل النموذج الأول

أولاً : السؤال الأول :

1) $D_f =]-1,0[\cup]0,+\infty[$

2) $x=-1$ مقارب شاقولي : $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

للخط C عند $-\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty$ ، $+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$

$y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty$: $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

3) $f(]-1,0[) =]-\infty,+\infty[\ni 0$

$f(]0,3[) =]-\infty,2[\ni 0$

f مستمر ومطرد في كل من المجالين يوجد في كل منهما حل وحيد للمعادلة .

$f([3,+\infty[) =]0,2] \not\ni 0$ لا يوجد حل

إذاً للمعادلة حلين .

4) $f(3)=2$ قيمة كبرى محلياً .

5) المماس الأفقي : $y=2$.

السؤال الثاني : $e^x - 3e^{-x} < -2$

نضرب بـ e^x : $e^{2x} - 3 < -2e^x$

حيث $e^x e^{-x} = 1$: $e^{2x} + 2e^x - 3 < 0$

$(e^x+3)(e^x-1) < 0$

e^x+3 موجب تماماً ومنه $e^x - 1 < 0 \longrightarrow e^x < 1$

$x < 0$

مجموعة الحلول : $S =]-\infty, 0[$

السؤال الثالث : نفرض :

$g(x) = x-1+\ln x$	$g'(x) = 1+\frac{1}{x}$
$g(1) = 0$	$g'(1) = 2$

حسب تعريف العدد المشتق : $g'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = 2$

ومنه $\lim_{x\to 1}\frac{x-1+\ln x}{x-1} = 2$ أي $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

ثانياً : السؤال الأول :

1) نعوض $z = 1+i$

$l_1 = (1+i)^2 - i(1+i) - i - 1$

$= 1+2i-1-i+1-i-1 = 0 = l_2$

محققة ومنه $1+i$ حل للمعادلة .

مجموع الحلين : $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$

$1+i+z_2 = \frac{i}{1} \longrightarrow z_2 = -1$

2) $z_1 = 1+i$: $r = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4} \longrightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$

$z_2 = -1 = e^{\pi i}$

السؤال الثاني : أمين السر نائبه المدير

1) عدد اللجان $= 5 \times 4 \times 3 = 60$

2) a) أمين السر نائبه المدير

عدد اللجان $= 5 \times 3 \times 2 = 24$

b) أمين السر نائبه المدير

عدد اللجان $= 1 \times 4 \times 3 = 12$

السؤال الثالث : $\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$ ، $\overrightarrow{n_Q}(-4,2,-2)$

$\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ المركبات متناسبة الناظمان مرتبطان خطياً

فالمستويان متوازيان .

نأخذ نقطة من أحدهما Q : $A(0,0,0)$

البعد بين مستويين $= dist(A,P) = \frac{|0-0+0+1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

ثالثاً : التمرين الأول :

1) $\frac{d-c}{b-a} = \frac{-1+i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{-1+i+i+1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i = e^{\frac{\pi}{2}i}$

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2}$$

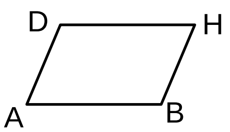
2) $z' = b + z_{\vec{w}} = 1+2i+2-i = 3+i$

3) $ABHD$ متوازي أضلاع ومنه

أي $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AB}$

$z_{\overrightarrow{DH}} = z_{\overrightarrow{AB}} \to h-d = b-a$

$h = 4+2i$



4) $|z-a| = |z-b|$

$AM = BM$

مجموعة النقاط M هي نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

التمرين الثاني :

1) f اشتقاقي على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$$

ومنه f متزايد .

2) نفرض القضية $E(n)$ أن $0<u_n<1$.

① نثبت $E(0)$: $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ محققة .

② نفرض $E(n)$ محققة أي $0<u_n<1$ (✯)

③ نثبت $E(n+1)$ أي $0<u_{n+1}<1$

من (✯) $0<u_n<1$ نطبق f

$f(0) < f(u_n) < f(1)$

$0 < \frac{u_n}{2-u_n} < 1$

$0 < u_{n+1} < 1$ محققة .

من ① و ② و ③ : $0<u_n<1$

3) $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{u_{n+1}}-1}{\frac{1}{u_n}-1} = \frac{\frac{2-u_n}{u_n}-1}{\frac{1}{u_n}-1} = \frac{\frac{2-2u_n}{u_n}}{\frac{1-u_n}{u_n}}$

$$= \frac{2(1-u_n)}{u_n} \cdot \frac{u_n}{1-u_n} = 2$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\ge 0}$ هندسية أساسها $q=2$

$$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1 = 2-1 = 1$$

4) $v_n = v_0 q^n \longrightarrow v_n = 2^n$

$$v_n = \frac{1}{u_n} - 1 = 2^n$$

$$\frac{1}{u_n} = (2^n)+1 \longrightarrow u_n = \frac{1}{(2^n)+1}$$

التمرين الثالث :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $x^2-4x+3 = x^2-4x+4-4+3$

الصيغة القانونية $= (x-2)^2 - 1$

3) نثبت أن $\Delta : y = x-2$ مقارب عند $+\infty$

$$f(x) - y_\Delta = \sqrt{(x-2)^2-1} - (x-2)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(x-2)^2-1}-(x-2)\right)\left(\sqrt{(x-2)^2-1}+(x-2)\right)}{\left(\sqrt{(x-2)^2-1}+(x-2)\right)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)^2} - 1 - \cancel{(x-2)^2}}{\left(\sqrt{(x-2)^2-1}+(x-2)\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - y_\Delta = 0$$

ومنه $\Delta : y = x-2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

$$\sqrt{(x-2)^2-1} < x-2$$

ومنه $f(x) - y_\Delta < 0$ ومنه C تحت المقارب بالكامل .

رابعاً : المسألة الأولى :

1) عند 0^+ : $\frac{-\infty}{0^+}$ ومنه

$x=0$ مقارب شاقولي عند $-\infty \leftarrow -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

عند $+\infty$: $\frac{+\infty}{+\infty}$ عدم تعيين

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \quad : \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي عند $+\infty \leftarrow +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) f مستمر واشتقاقي على I (النهايات مكتوبة)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$f'(x)=0$ ومنه $\ln x = 0$ أي $x=1$

$$f(1) = \frac{1+0}{1} = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(1)=1$ قيمة كبرى محلياً

3) $f(x)=0$

$$f\left(]0,1[\right) =]-\infty,1[\ \ni\ 0$$

f مستمر ومطرد في هذا المجال ، للمعادلة حل وحيد فيه

$$f\left([1,+\infty[\right) =]0,1] \ \not\ni\ 0$$

لا يوجد حل في هذا المجال .

إذاً للمعادلة حل وحيد ينتمي للمجال $]0,1[$.

4) $f(x) \ge 0$

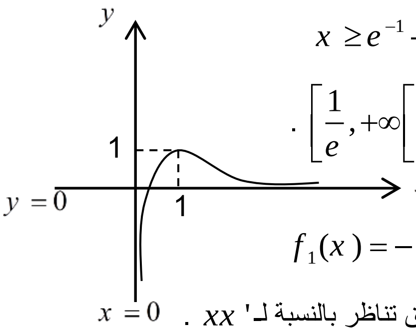
$\frac{1+\ln x}{x} \ge 0$ المقام موجب

ومنه $1+\ln x \ge 0$ أي $\ln x \ge -1$

$$x \ge e^{-1} \longrightarrow x \ge \frac{1}{e}$$

مجموعة حلول المتراجحة $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$.

5) .



$$f_1(x) = -\left(\frac{1+\ln x}{x}\right) = -f(x)$$

ومنه ينتج C_1 عن C وفق تناظر بالنسبة لـ xx' .

المسألة الثانية :

1) $\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$ ومنه $2(x-3)+1(y-2)-1(z)=0$

$$P : 2x+y-z-8=0$$

2) $AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} = R$

معادلة الكرة : $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 6$

3) $dist(A,Q) = \frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{6}{\sqrt6} = \sqrt6 = R$

فالمستوي Q مماس للكرة .

4)

$$\begin{array}{rl} & P : 2x+y-z-8=0 \\ + & Q : x-y+2z+4=0 \\ \hline & 3x+z-4=0 \end{array}$$

$$z = 4-3x$$

من معادلة P : $2x+y-4+3x+8=0$

$$y = 12-5x$$

نفرض $x=t$ ومنه :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 12-5t \\ z = 4-3t \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

5)

$$x_I = \frac{2x_A+1x_B}{2+1} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$y_I = \frac{2y_A+1y_B}{2+1} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$z_I = \frac{2z_A+1z_B}{2+1} = \frac{2+0}{3} = \frac{2}{3}$$

ومنه $I\left(\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$.